ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XII Сем. **№ 138.** № 6.

АНАЛОГІЯ
МЕЖДУ ГАЗАМИ И РАСТВОРЕННЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ.

Теорія van't Hoffa и гипотеза Arrhenius'a.

(Продолженіе).

Наконецъ къ растворамъ приложимъ и законъ Avogadro.

Van't-Hoff, основываясь на законѣ Henry (1803), по которому количество растворяющагося въ водѣ газа пропорціонально его давленію при прочихъ равныхъ условіяхъ, и пользуясь обратимымъ цикломъ, выводитъ, что при одинаковой температурѣ и концентраціи осмотическое давленіе раствора газа равно упругости этого газа, т. е., иначе говоря, доказываетъ, что законъ Avogadro приложимъ къ растворамъ газовъ. Если это такъ, то естественно ожидать, что закону Avogadro въ растворахъ повинуются не только тѣ тѣла, которыя при обыкновенныхъ условіяхъ „случайно имѣютъ форму газа", а и жидкости, и твердыя вещества. Что это такъ, доказываютъ измѣренія Pfeffera, опыты de-Vries'a, наблюденія надъ упругостью пара и температурой замерзанія растворовъ.

Если законъ Avogadro справедливъ напр. для растворовъ сахара, надъ которыми дѣлалъ опыты Pfeffer, то осмотическое давленіе этихъ растворовъ должно равняться тому давленію, какое имѣлъ-бы при той-же температурѣ напр. водородъ, содержащій въ единицѣ объема столько-же частицъ, сколько частицъ сахара содержится въ единицѣ объема его раствора. Давленіе это легко вычислить, зная концентрацію раствора, молекулярный вѣсъ сахара и температуру опыта. Если напр. 1 gr. сахара $C_{12} H_{22} O_{11}$

содержится въ 100 gr. воды, т. е. въ 100,6 cc. раствора, то вѣсъ 100,6 cc. водорода, содержащаго такое-же число частицъ въ единицѣ объема, долженъ быть во столько разъ меньше вѣса сахара, во сколько разъ молекулярный вѣсъ водорода (2) меньше молекулярнаго вѣса сахара (342), т е. въ 100,6 cc. должно содержаться $^2/_{342}$ gr. водорода, или 0,0581 gr. въ 1 литрѣ. А такъ какъ при 0° и 1 атм. давленія въ 1 литрѣ содержится 0,08956 gr. водорода, то давленіе водорода, содержащаго въ 1 литрѣ 0,0581 gr. будетъ

$$\text{при } 0^\circ = \frac{0{,}0581}{0{,}08956} = 0{,}649 \text{ атм., а при } t^\circ = 0{,}649\ (1 + 0{,}00367\ t).$$

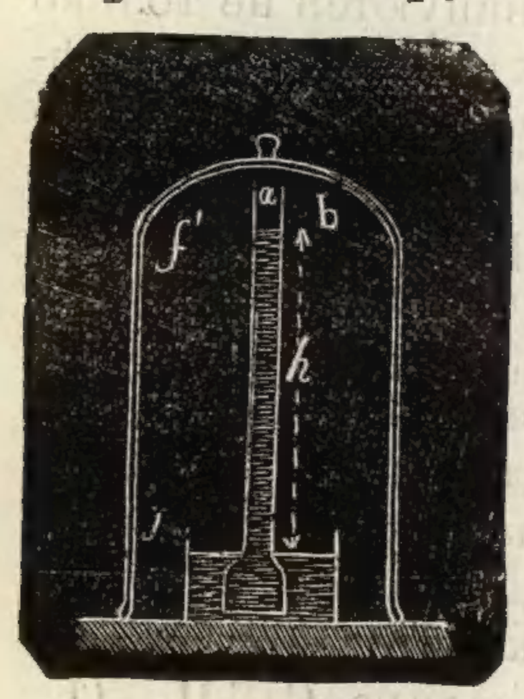
Сравнивая вычисленныя по этой формулѣ давленія съ непосредственно измѣренными Pfeffer'омъ осмотическими давленіями раствора, получаемъ близкія числа.

Температура t.	Осмотич. давленіе	0,649 (1+0,00367 t)
6°,8	0,664 атм.	0,665
13°,7	0,691 „	0,681
14°,2	0,671 „	0,682
15°,5	0,684 „	0,686
22°,0	0,721 „	0,701
32°,0	0,716 „	0,725
36°,0	0,746 „	0,735

De-Vries, пользуясь описаннымъ выше способомъ, нашелъ, что растворы тростниковаго сахара, превращеннаго сахара, декстрозы, раффинозы, маннита, глицерина, яблочной, винной, лимонной кислотъ, мочевины, содержащіе въ одинаковыхъ объемахъ одинаковое число частицъ, имѣютъ одинаковыя осмотическія давленія. Слѣдовательно законъ Avogadro распространяется и на эти вещества.

Законъ Avogadro для растворовъ подтверждается также наблюденіями надъ упругостью пара растворовъ.

Представимъ себѣ, что сосудъ съ полупроницаемымъ дномъ и вертикальной трубкой сверху, наполненный какимъ нибудь растворомъ и погруженный въ растворитель, помѣщенъ подъ колоколъ, изъ подъ котораго выкачанъ воздухъ (фиг. 20). Осмотическое давленіе измѣряется въ этомъ случаѣ высотой столба жидкости h. Легко доказать, что давленіе пара одинаково и внутри трубки — въ точкѣ a напр., и внѣ ея — въ точкѣ b на той-же высотѣ. Если-бы давленіе пара въ a постоянно оставалось-бы больше, чѣмъ въ b, то паръ переходилъ бы изъ a въ b, здѣсь сгущался-бы въ жидкость, которая падала бы въ сосудъ A, высота столба жидкости h уменьшалась-бы, а такъ какъ осмотическое давленіе имѣетъ для данной температуры опредѣленную величину, то взамѣнъ



Фиг. 20.

испарившагося въ a растворителя, проникали-бы новыя его количества сквозь полупроницаемое дно. Произошло-бы perpetuum mobile — что невозможно. Точно также можно доказать, что давленіе пара въ a не можетъ быть меньше давленія въ b. Итакъ давленіе пара въ a равно его давленію въ b. Назовемъ это давленіе черезъ f', а давленіе парарастворителя у уровня жидкости въ сосудѣ А черезъ f. Очевидно, что $f > f'$ на вѣсъ столба паровъ, заключающагося между уровнями жидкости въ сосудѣ А и въ трубкѣ. Называя этотъ вѣсъ черезъ g, имѣемъ:

$$f = f' + g \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Положимъ, что молекулярный вѣсъ растворителя $=$ M, его удѣльный вѣсъ $= s$, и что одна молекула растворённаго вещества приходится на N молекулъ растворителя.

Если формула

$$p \,.\, v = 845 \text{ T}$$

приложима къ растворамъ, т. е. если законъ Avogadro для растворовъ вѣренъ, то осмотическое давленіе

$$p = \frac{845 \text{ T}}{v}.$$

Такъ какъ одна молекула растворённаго вещества приходится на N молекулъ растворителя, а молекулярный вѣсъ растворителя $=$ M, то вѣсъ растворителя, содержащій 1 молекулу растворённаго вещества $=$ N . M, а его объемъ

$$v = \frac{\text{N . M}}{s};$$

поэтому

$$p = \frac{845 \text{ T} \,.\, s}{\text{N . M}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Осмотическое давленіе p измѣряется вѣсомъ столба h раствора, удѣльный вѣсъ котораго безъ большой погрѣшности можно принять равнымъ s такъ какъ растворъ берется слабый. На каждую единицу поверхности это давленіе равно, слѣдовательно:

$$p = h \,.\, s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Изъ уравненій (4) и (5) имѣемъ

$$h = 845 \frac{\text{T}}{\text{N . M}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Такъ какъ упругости f и f' для разбавленныхъ растворовъ разнятся мало, то можно безъ большой погрѣшности при вычисленіи вѣса столба паровъ g ввести упругость f' вмѣсто средняго значенія $\frac{f + f'}{2}$. Искомый вѣсъ столба паровъ упругости f высо-

той h и съ основаніемъ $= 1$, т. е. вѣсъ h объемныхъ единицъ пара вещества, молекулярный вѣсъ котораго M, можно вычислить такъ: Если V — объемъ пара, содержащій M вѣсовыхъ единицъ его, то вѣсъ единицы объема будетъ $\frac{M}{V}$, а вѣсъ h единицъ объема, т. е.

$$g = \frac{M}{V} h .$$

По закону Avogadro для газовъ и паровъ между объемомъ V и упругостью f существуетъ зависимость

$$V = \frac{845\ T}{f} ;$$

значитъ

$$g = \frac{M . h . f}{845\ T} .$$

Но такъ какъ (ур. 3)

$$f = f' + g ,$$

то

$$f = f' + \frac{M . h . f}{845 . T} .$$

А такъ какъ (ур. 6)

$$h = 845 \frac{T}{N . M} ,$$

то

$$f = f' + \frac{f}{N} ,$$

или

$$\frac{f - f'}{f} = \frac{1}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Отношеніе разности упругостей паровъ растворителя и раствора къ упругости пара раствора или, какъ его иначе называютъ, относительное пониженіе упругости пара раствора, обратно пропорціонально числу молекулъ растворителя, приходящихся на 1 молекулу растворенннаго вещества, т. е. другими словами пропорціонально концентраціи раствора. Этотъ законъ былъ открытъ опытнымъ путемъ van Babo (1847) и Wüllner'омъ (1856). Ур. (7) говоритъ далѣе, что относительное пониженіе упругости пара не зависитъ ни отъ природы растворенннаго вещества, ни отъ природы растворителя, а лишь отъ отношенія между числомъ молекулъ растворенннаго вещества и растворителя. А это — общій выводъ изъ обширныхъ работъ Raoult'а (1878 — 1890) надъ упругостью

пара растворовъ въ различныхъ растворителяхъ. Raoult опытнымъ путемъ былъ приведенъ къ формулѣ *):

$$\frac{f - f}{f} = \frac{n}{N + n},$$

гдѣ n — число молекулъ растворенняго вещества, приходящихся на N мол. растворителя, — формулѣ очевидно тожественной съ (7) при $n = 1$ и при большомъ N, т. е. при сильно разбавленныхъ растворахъ.

Если $N = 100$, т. е. если на 1 молекулу растворенняго вещества приходится 100 молекулъ растворителя, то изъ ур. (7) имѣемъ:

$$\frac{f - f}{f} = 0{,}01.$$

Въ слѣд. таблицѣ приведены найденные Raoult'емъ значенія $\frac{f - f}{f}$ для такихъ растворовъ различныхъ веществъ въ различныхъ растворителяхъ:

Растворитель:	$\frac{f - f}{f}$
Вода **) . . .	0,0102
Сѣрнистый углеродъ .	0,0096
Хлористый углеродъ .	0,0105
Хлороформъ . .	0,0109
Амиленъ . .	0,0106
Бензолъ . . .	0,0100
Эфиръ . . .	0,0104
Алкоголь . . .	0,0101
Уксусная кислота . .	0,0101

Такъ какъ наши, оправдавшіеся, какъ видно, выводы построены на формулѣ $p \cdot v = 845$ T въ приложеніи къ растворамъ, формулѣ, выражающей законы Boyle'я, Gay-Lussac'а и Avogadro, то естественно заключить, что и эти законы приложимы къ растворамъ.

Наконецъ законъ Avogadro для растворовъ можно провѣрить наблюденіями надъ температурой замерзанія растворовъ.

Представимъ себѣ замкнутый кольцеобразный сосудъ (фиг. 21), заключающій растворъ какого нибудь вещества при температурѣ

*) Raoult. Sur les tensions de vapeur des dissolutions. Annales de Chimie et de Physique, т. XX, 1890, стр. 350.

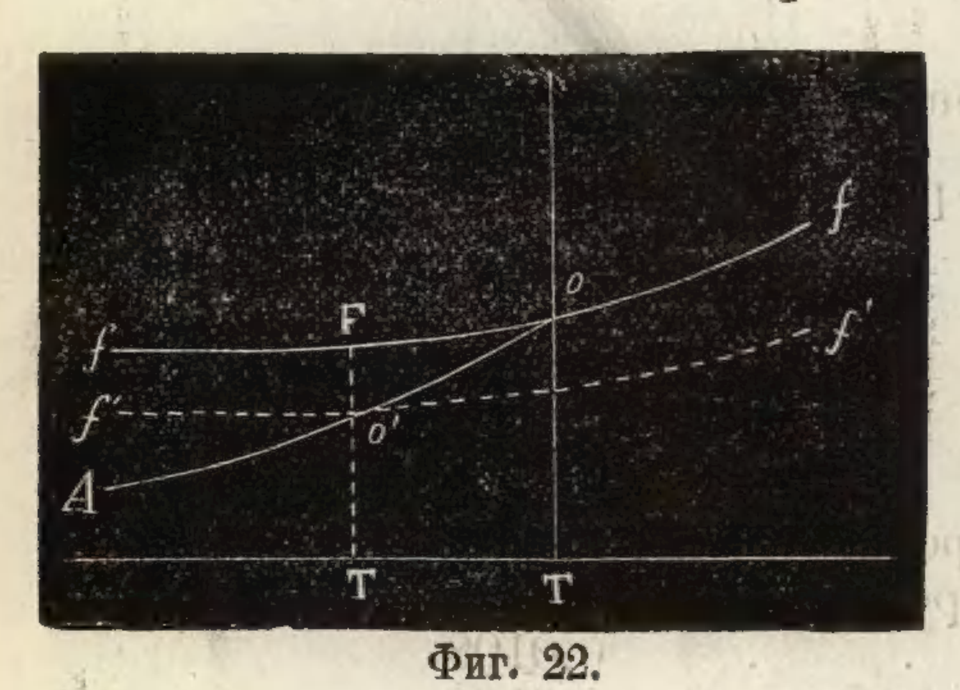
**) Для растворовъ органическихъ веществъ въ водѣ. О минеральныхъ веществахъ рѣчь впереди.



Фиг. 21.

замерзанія T' и положимъ, что опредѣленная часть A жидкости замерзла. Легко показать, что давленіе пара раствора равно при этихъ условіяхъ давленію пара льда. Дѣйствительно, если-бы напр. давленіе пара льда оставалось постоянно больше давленія пара раствора, то паръ переходилъ бы все время отъ льда къ раствору и здѣсь сгущался-бы. Поэтому концентрація раствора уменьшалась-бы и слѣдовательно температура его замерзанія повышалась-бы. Растворъ тогда сталъ бы замерзать, т. е. получилось-бы perpetuum mobile. Такъ какъ оно невозможно, то невозможно и допущеніе, что упругость пара раствора меньше упругости пара льда. Подобнымъ образомъ доказывается, что она не можетъ быть больше упругости пара льда.

Если *ff* (фиг. 22) изображаетъ графически упругость пара растворителя въ зависимости отъ температуры, а *f'f* — упругость пара раствора и если точка O отвѣчаетъ температурѣ замерзанія растворителя, то упругость пара льда выразится какой нибудь кривой AO'O. Точка O' соотвѣтствуетъ по предъидущему температурѣ замерзанія раствора, часть кривой *ff* влѣво отъ точки O выражаетъ упругости пара переохлажденнаго растворителя, а часть кривой *f'f* влѣво отъ точки O' — переохлажденнаго раствора.



Фиг. 22.

Въ механической теоріи тепла выводится слѣдующая зависимость между скрытой теплотой плавленія W вещества, молекулярный вѣсъ котораго = M, температурой его замерзанія T, упругостью его пара *f* и упругостью пара льда *f'*:

$$\frac{df}{f\,dT} - \frac{df'}{f\,dT} = \frac{W.M}{2T^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8).$$

Кривыя давленій пара можно въ нашемъ случаѣ принять безъ большой погрѣшности за прямыя; можно кромѣ того положить $f = f'$, что дѣйствительно справедливо при T° и вблизи этой температуры. Тогда (см. фиг. 22) имѣемъ:

$$dT = -(T - T');\ df = O'T' - OT;\ f = O'T' = FT';\ df' = FT' - OT \text{ и } f = OT = FT'.$$

Подставляя эти значенія въ ур. (8), получимъ:

$$\frac{FT' - OT}{FT'(T - T')} - \frac{O'T' - OT}{FT'(T - T')} = \frac{W.M}{2T^2}$$

или

$$\frac{FT' - O'T'}{FT'(T - T')} = \frac{FO'}{FT'(T - T')} = \frac{W.M}{2T^2},$$

но

$$\frac{F'O}{FT'} = \frac{f - f'}{f},$$

и, если газовые законы приложимы къ растворамъ, то, какъ мы видѣли:

$$\frac{f - f'}{f} = \frac{1}{N}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{N(T - T')} = \frac{W.M}{2T^2},$$

откуда

$$T - T' = \frac{2T^2}{N.M.W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

N . M есть вѣсъ растворителя, содержащій 1 молекулу растворенная вещества. Если положимъ, что 1 мол. растворенная вещества приходится на 100 вѣс. частей растворителя, то

$$N.M = 100$$

а

$$T - T' = 0{,}02\,\frac{T^2}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Эта же формула выведена van't Hoff'омъ нѣсколько инымъ путемъ. Planck, на основаніи другихъ соображеній *) приходитъ къ формулѣ

$$T - T' = 0{,}0197\,\frac{T^2}{W},$$

весьма близкой къ той, которую мы получили.

Съ 1878 г. начались обширныя работы Raoult'я надъ температурой замерзанія растворовъ различныхъ веществъ въ различныхъ растворителяхъ. Съ нѣкоторыми результатами его классическихъ трудовъ читатели Вѣстн. Оп. Физ. уже знакомы по статьѣ покойнаго проф. П. Алексѣева **). Не вдаваясь въ изложеніе результатовъ его работъ, скажемъ лишь, что выводы изъ нихъ для растворовъ многихъ веществъ согласуются съ тѣми, какіе можно сдѣлать изъ формулы (10), какъ видно изъ слѣд. таблицы.

---

*) См. Planck: Ueber die molekulare Konstitution verdünter Lösungen въ Zeitschrift für physik. Chemie. 1887 г. 577 — 582 стр.

**) См. Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат. II сем. № 23, стр. 245–247 (1887).

Растворитель	Скрытая теплота плавленія W	$T - T' = 0{,}02 \frac{T^2}{W}$	T — T' Наблюд.
Вода	79	18,9	18,5
Уксусная кислота . .	43,2	38,8	38,6
Муравьиная кислота .	55,6	28,4	27,7
Бензолъ . . .	29,1	53	50
Нитробензолъ . .	22,3	69,5	70,7

Для бромистаго этилена, растворы въ которомъ также были изучены Raoult'емъ, скрытая теплота плавленія не была извѣстна: van't Hoff вычислилъ ее, зная изъ опытовъ Raoult'я, что T — T' въ бромистомъ этиленѣ = 117,9 и нашелъ W = 13. Petterson, опредѣлившій по просьбѣ van't Hoff'a скрытую теплоту плавленія бромистаго этилена нашелъ въ среднемъ W = 12,94.

Итакъ, уравненіе

$$p \, . \, v = 845 \text{ T},$$

характеризующее газообразное состояніе тѣлъ, прилагается ко многимъ веществамъ, находящимся въ разбавленныхъ растворахъ.

Законъ Avogadro въ приложеніи къ газамъ далъ возможность опредѣленія молекулярнаго вѣса всѣхъ газовъ, всѣхъ веществъ, способныхъ обращаться въ пары. Законъ Avogadro въ приложеніи къ растворамъ многихъ веществъ даетъ возможность опредѣленія молекулярнаго вѣса всѣхъ веществъ, способныхъ растворяться въ какомъ нибудь растворителѣ, а такихъ веществъ во много разъ больше, чѣмъ способныхъ переходить въ паръ. Эти опредѣленія молекулярнаго вѣса производятся кромѣ того далеко проще, чѣмъ при газахъ, такъ какъ легче измѣрить напр. температуру замерзанія раствора, чѣмъ плотность пара. Это и даетъ право Ostwald'у сказать, что „теорія растворовъ van't Hoff'a обѣщаетъ болѣе разнообразныхъ и важныхъ слѣдствій, чѣмъ напр. дала знаменитая кинетическая теорія газовъ за все время ея существованія" *).

Однако оказывается, что теорія van't Hoff'a въ томъ видѣ, въ которомъ она была изложена, приложима только къ растворамъ многихъ, но далеко не всѣхъ тѣлъ. Громадный классъ солей, сильныхъ минеральныхъ кислотъ и основаній въ водныхъ растворахъ не подчиняется закону Avogadro, даетъ осмотическія давленія всегда большія, чѣмъ требуется формулой

$$p \, . \, v = 845 \text{ T},$$

пониженія упругости пара большія, чѣмъ требуетъ формула

$$\frac{f - f}{f} = \frac{n}{N}$$

---

*) Оствальдъ: О растворахъ. Пер. Н. Дрентельна. Спб. 1889.

и пониженія температуры замерзанія большія тѣхъ, которыя опредѣляются по формулѣ

$$T - T' = 0{,}02 \frac{T^2}{W}.$$

Чтобы подвести и эти вещества подъ одинъ общій законъ, приходится измѣнить эти формулы, вводя въ каждую изъ нихъ множитель — i, различный для различныхъ веществъ, вообще большій единицы и равный ей для тѣхъ веществъ, которыя подчиняются газовымъ законамъ въ растворахъ. Тогда получимъ:

$$p \cdot v = i\, 845\, T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{f - f'}{f} = i \frac{n}{N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$T - T' = i\, 0{,}02 \frac{T^2}{W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Этому множителю i можно придать двоякій смыслъ.

Можно допустить, что законы, управляющіе растворенными веществами, не выражаются общей формулой

$$p \cdot v = 845\, T,$$

но что эта формула должна быть замѣнена другой, болѣе общей

$$p \cdot v = i\, 845\, T$$

и сообразно съ этимъ должна быть измѣнена *формулировка законовъ* Boyle'я, Gay-Lussac'а и Avogadro.

Но можно также допустить, что газовые законы остаются неизмѣнными для растворовъ, но что нѣкоторыя *растворенныя вещества измѣняются* въ растворахъ, при чемъ число ихъ молекулъ увеличивается въ i разъ.

Arrhenius и дѣлаетъ это второе допущеніе.

(Окончаніе слѣдуетъ).

НУЖНЫ ЛИ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКѢ И ФИЗИКѢ?

(Продолженіе). *)

Мнѣ какъ-то разсказывали, что у издателей газетъ имѣется свой особый календарь, котораго надо строго придерживаться, чтобы не терять подписчиковъ. Согласно этому календарю, въ маѣ мѣсяцѣ обязательно помѣстить нѣсколько ироническихъ за-

*) См. № 135 В. О. Ф.

мѣтокъ и перепечатокъ на тему объ экзаменахъ. Въ текущемъ году, сколько замѣчаю, майская программа соблюдается многими газетами съ особеннымъ усердіемъ, и, къ совершенному удовольствію провалившихся юношей и огорченныхъ родителей, безполезность экзаменовъ вообще утверждается самымъ категорическимъ образомъ и вредъ, причиняемый ими, доказывается ссылками на имена авторитетовъ. — Ничего не подѣлаешь, господа, надо жить по календарю!

Въ виду этого, будемъ и мы съ вами, читатель, продолжать разборъ нашего вопроса: „нужны-ли экзамены?"

Поставленъ ли этотъ вопросъ *незнаніемъ* или *сомнѣніемъ?* Но еще, такъ сказать, вчера, во всей Европѣ, на всей цивилизованной поверхности земного шара, мы знали, что экзамены такъ же нужны, какъ нужно движеніе для того чтобы передвинуться, усиліе — для того, чтобы поднять тяжесть; въ теченіе многихъ вѣковъ мы были убѣждены, что экзамены такъ же необходимы, какъ необходимо состязаніе для права на отличіе, побѣда — для права надѣть лавры и пр. И вдругъ сегодня, въ Россіи, мы усомнились въ этомъ знаніи, потому что результаты нашей экзаменаціонной системы мало насъ удовлетворяютъ.

Сомнѣніе бываетъ подчасъ весьма плодотворно; но оно ведетъ насъ въ сторону истины, а не отъ нея, въ томъ лишь случаѣ, когда зарождается не вслѣдствіе *недоразумѣнія*, а на основаніи очевидныхъ и безспорныхъ результатовъ наблюденій и *правильно* обставленныхъ опытовъ. Путемъ такихъ, напримѣръ, сомнѣній шелъ и идетъ понынѣ прогрессъ наукъ индуктивныхъ, изъ области которыхъ исключаются мало по малу ложныя гипотезы, устраняются ошибочныя заключенія, неправильныя обобщенія и пр. Но и тутъ возможны недоразумѣнія: можно усомниться и въ безусловной истинѣ, если при постановкѣ пробнаго опыта не были приняты всѣ должныя предосторожности. Тѣмъ болѣе такія недоразумѣнія возможны въ области наукъ гуманитарныхъ вообще и педагогіи въ частности, гдѣ объектомъ опыта служитъ не какая нибудь стекляная трубка, а живой человѣкъ.

А потому, чтобы имѣть въ наше время право возставать противъ экзаменовъ, писать противъ нихъ статьи, сбивающія съ толку какъ юныхъ такъ и старыхъ читателей, надо самому быть увѣреннымъ, мало того — надо это *доказать*, что опыты нашихъ школьныхъ экзаменовъ въ послѣдніе годы были обставлены вполнѣ правильно и привели въ итогѣ къ такому выводу, что сами по себѣ экзамены безполезны и даже вредны.

Я позволяю себѣ утверждать, что такихъ доказательствъ господа противники экзаменовъ представить вовсе не могутъ, ибо все что ими на эту тему говорится, можетъ, въ крайнемъ случаѣ, возбудить сомнѣнія лишь въ правильности той либо другой системы экзаменовъ, а не принципіальной ихъ пользы.

Было бы слишкомъ долго разбирать порознь каждое изъ возраженій, высказываемыхъ противъ экзаменовъ. Въ общемъ, эти

возраженія распадаются на три группы: 1) медико-филантропическія соболѣзнованія, 2) упреки по адресу экзаменаторовъ и 3) критика той либо другой системы переводныхъ и окончательныхъ испытаній.

Возраженія первой категоріи, самыя модныя въ наше время и многочисленныя, сводятся — какъ это я старался показать въ предыдущей бесѣдѣ — къ констатированію того факта, что экзаменамъ подвергаются (по винѣ родителей) *не тѣ*, для кого они предназначены, или, лучше сказать, не только тѣ, для кого они предназначены, но и многіе другіе ученики, разслабленные, изнѣженные, неспособные, сбитые съ толку, и пр., попавшіе въ учебное заведеніе по недоразумѣнію и переходящіе до поры до времени изъ класса въ классъ изъ за ложнаго къ нимъ состраданія со стороны преподавателей и насилія со стороны родителей. Логически правильный выводъ изъ всѣхъ къ этой категоріи относящихся разглагольствованій, можетъ быть лишь тотъ, что такъ какъ для многихъ дѣтей, отдаваемыхъ нынѣ въ гимназіи, эти послѣднія по своимъ программамъ не соотвѣтственны, то, очевидно, надо позаботиться объ учрежденіи *другихъ* учебныхъ заведеній, съ болѣе доступнымъ курсомъ, но за то и съ меньшими правами. Общество само не хочетъ этой заботы взять на себя и непремѣнно ждетъ инициативы училищъ новаго типа (напр. профессіональныхъ, техническихъ, промышленныхъ, сельско-хозяйственныхъ и пр.) отъ Правительства. Причина, повидимому, та, что предубѣжденіе объ „общедоступности" классическихъ гимназій и университетовъ, слишкомъ сильно укоренилось въ нашемъ обществѣ, путемъ традицій, а газеты наши не хотятъ отрезвлять въ этомъ отношеніи читателей, и не только не стараются разсѣять это предубѣжденіе, но еще усугубляютъ его нападками на строгость нашей школьной системы. Чтожъ! Экзамены и въ этомъ отношеніи приносятъ свою долю пользы, ибо, хотя медленно, хоть и болѣзненно, но все же раскрываютъ понемногу глаза всѣмъ тѣмъ, кто не видитъ, или не хочетъ видѣть какую роль должны въ наше время играть гимназіи и университеты. А такъ какъ нѣтъ другого средства заставить родителей понять, что если, по чему либо, ихъ дѣти не годятся въ претенденты на высшую степень образованія, то надо позаботиться о предоставленіи имъ другого, подходящаго образованія, хотя бы и не столь „классическаго", — то, при данномъ стеченіи обстоятельствъ, приходится, повторяю,—какъ это не грустно по существу—стоять за систему фильтрованія гимназій, университетовъ и пр. Эта то точка зрѣнія, опять таки по недорозумѣнію, о которомъ рѣчь впреди, привела къ системѣ „строгихъ" экзаменовъ.

Вторая категорія возраженій противъ экзаменовъ, обнимающая всевозможные разсказы и анекдоты о „возмутительномъ" и „безчеловѣчномъ" поведеніи экзаменаторовъ, въ крайнемъ случаѣ можетъ лишь доказать тотъ фактъ, что въ числѣ нашихъ учителей попадаются и люди для этой профессіи неподходяшіе. Но — во первыхъ — всѣ эти разсказы и анекдоты выносятся изъ экзаменаціонной

комнаты самими экзаменовавшимися, передаются устно, прикрашиваются, подчасъ даже попросту измышляются, и — не смотря на все это — находитъ полное почти довѣріе въ обществѣ. Фактъ весьма знаменательный, — и не менѣе грустный. Даже завѣдомо извѣстному лгуну повѣрятъ на тотъ разъ, когда онъ будетъ разсказывать небылицы, за что и какъ учитель поставилъ ему двойку. Но — допустимъ, что во всѣхъ этой категоріи нападкахъ есть даже вдвое болѣе правды, чѣмъ ея есть. Чтожъ отсюда слѣдуетъ? Если есть плохіе учителя, несправедливые экзаменаторы, вообще — если среди нашихъ педагоговъ есть люди неподходящіе къ этой профессіи, возставайте — если угодно — противъ допущенія ихъ къ таковой профессіи. Если, напримѣръ, вы находите, что права государственной службы, предоставляемыя русскимъ педагогамъ по традиціи, слишкомъ комфортабельны и заманчивы (что, въ скобкахъ будь сказано, нахожу и я)—возставайте противъ такого порядка, доказывайте, что благодаря именно этому комфорту, этимъ каникуламъ, этимъ третнымъ не въ зачетъ, этой перспективѣ скорой выслуги пенсіи и пр., въ учителя идутъ *не только тѣ*, кто годится, но и тѣ, которымъ учебная служба по сравненію съ иною кажется достаточно лакомымъ кускомъ. Но, при чемъ же тутъ экзамены? — спрашиваю я опять.

Что же касается третьей группы возраженій, а именно порицанія самой системы испытаній, той формальности, которою находятъ нужнымъ ихъ обставлять, — то, раздѣляя отчасти подобныя порицанія, я долженъ остановиться на нихъ подробнѣе, почему и откладываю разборъ этихъ возраженій до слѣдующей бесѣды. *Р. И.*

(Продолженіе слѣдуетъ.)

ОПЫТЪ СЪ ЭЛЕКТРОЛИЗАЦІЕЙ БУМАГИ.

Опыты съ электричествомъ тренія различныхъ веществъ производятся обыкновенно при помощи электрическихъ маятниковъ (бузинные шарики) и поэтому страдаютъ, какъ и большинство другихъ опытовъ, неестественностью.

Вотъ напр. простой и вмѣстѣ съ тѣмъ поразительный опытъ для доказательства свойства бумаги электризоваться при треніи:

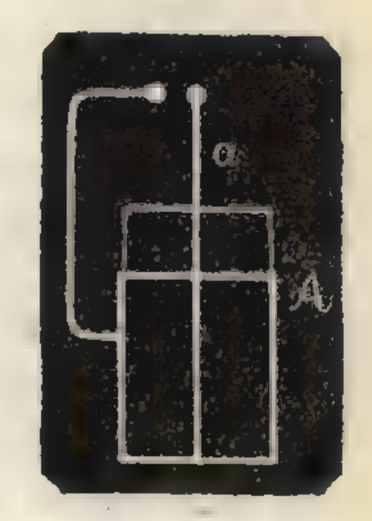
На спинку стула кладется обыкновенная палка (тросточка) такъ, чтобы она была въ равновѣсіи, послѣ этого игральная, почтовая или визитная карта нагрѣвается на лампѣ для удаленія изъ нея влажности и трется подъ мышкой шерстянаго (суконнаго) сюртука. При приближеніи карты къ палкѣ эта послѣдняя сильно притягивается въ стороны, вверхъ или внизъ и даже можетъ при этомъ упасть со стула.

Проф. *П. Бахметьевъ* (Софія).

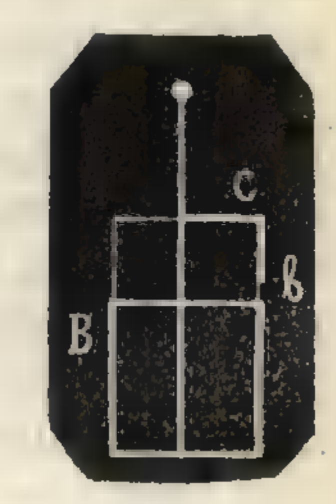
Новый опытъ съ электростатической индукціей.

Повторяя опыты *Лоджа* надъ электрическимъ резонансомъ, я неожиданно напалъ на одно интересное явленіе электростатической индукціи.

На некрашенномъ и неполированномъ деревянномъ столѣ устанавливается на одномъ его концѣ электрофорная машина, одинъ изъ кондукторовъ которой соединяется проволокой съ другимъ столомъ или поломъ, а другой съ проволокой *a* (фиг. 23) лейденской банки A (величина безразлична), стоящей на столѣ вблизи электрической машины. На нѣкоторомъ разстояніи отъ банки A помѣщается на томъ же столѣ банка B (фиг. 24) (величина безразлична), отъ внутренней обкладки которой идетъ оловяная полоска *c* къ наружной обкладкѣ, но отдѣляется отъ нея разстояніемъ *b* (0,5 — 1 мм.). Для измѣненія разстоянія *b* удобнѣе сдѣлать наружную обкладку изъ жести, край которой вверху срѣзанъ наискось; повертывая тогда наружную обкладку, мы заставимъ жесть либо приблизиться, либо удалиться отъ конца полоски *c*. Это бываетъ необходимо дѣлать при очень слабыхъ электрическихъ дѣйствіяхъ.



Фиг. 23.



Фиг. 24.

Явленіе состоитъ въ томъ, что если держать шарикъ банки B рукой, то при постоянномъ вращеніи электрической машины и слѣдовательно при періодическомъ разряженіи банки A, въ *b получается яркій потокъ искръ*. Явленіе, повидимому, не ослабѣваетъ, если банка A стоитъ напр. на одномъ, а банка B на другомъ концѣ стола (разстояніе у меня было $1^1/_2$ м.). Опытъ былъ особенно поразителенъ, когда я положилъ на одинъ конецъ стола сосновую неокрашенную доску, а другой ея конецъ подперъ стуломъ и получилъ то же явленіе даже томъ случаѣ, когда банка B находилась на другомъ концѣ доски, т. е. въ данномъ случаѣ *на разстояніи 9 метровъ отъ банки* A.

Этотъ опытъ не удается въ слѣдующихъ случаяхъ:

1. Если, держа шарикъ банки B, прикоснуться другой рукой или просто туловищемъ къ столу; или если одно лицо держитъ шарикъ банки B, а другое касается стола.

2. Если лицо, держащее шарикъ банки B, стоитъ на изолированной подставкѣ.

3. Если свободный (т. е. соединенный съ поломъ или другимъ столомъ) кондукторъ соединить съ тѣмъ же столомъ, на которомъ находится банка A.

4. Если банка В стоитъ на изолирующей подставкѣ или приподнята надъ столомъ (при тонкихъ изолирующихъ слояхъ явленіе только ослабѣваетъ).

5. Если не касаться шарика банки В.

6. Если опыты дѣлать не на столѣ, а не полу.

Описанное здѣсь явленіе, мнѣ кажется, можно объяснить слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что съ банкой А соединенъ положительный кондукторъ, тогда на наружной ея обкладкѣ получимъ вслѣдствіе вліянія связанное —Е (электричество), а образовавшееся при этомъ свободное +Е распространится по всему столу и постепенно уйдетъ въ землю или полъ, и соединится съ —Е другого кондуктора, отведеннаго именно къ полу. Распространяясь по столу, —Е наэлектризовываетъ и наружную обкладку банки В и, разлагая естественное ея электричество, сдѣсь сгущается, причемъ положительное электричество внутренней обкладки банки связывается, а свободное отрицательное уйдетъ къ землѣ черезъ руку, держащую шарикъ банки В. При достаточномъ напряженіи электричества обѣихъ обкладокъ +Е и —Е и будутъ соединяться въ разрывѣ *b* и давать такимъ образомъ искры.

Такъ какъ дерево полупроводникъ, то свободное +Е стола не уйдетъ такъ скоро въ полъ и кромѣ того постоянно будетъ возобновляться новыми зарядами лейденской банки А. Собственно электризація стола положительнымъ электричествомъ будетъ совершаться *періодически* и такъ сказать *колебательно* въ виду того, что лейденская банка А постоянно заряжается и разряжается, т. е. выражаясь вульгарно, столъ у насъ будетъ „*дышать*“ положительнымъ электричествомъ, а вслѣдствіи этого и искры въ банкѣ В будутъ тоже періодическими. Разстояніе *b* можно сдѣлать такимъ, что періоды разряженія въ В будутъ такими же по продолжительности, какъ и въ А.

Отводя свободное +Е стола въ полъ, мы, разумѣется, не получимъ описаннаго явленія точно также и тогда, если въ столъ пустить еще и —Е (см. 3-е условіе); наоборотъ, при изолированныхъ ножкахъ стола, явленіе должно получиться сильнѣе, что и было замѣчено въ дѣйствительности.

Этотъ опытъ можетъ служить нагляднымъ доказательствомъ существованія электростатической индукціи и во всякомъ случаѣ по своей простотѣ предпочтительнѣе передъ другими аппаратами для этой цѣли, очень часто вслѣдствіи влажности не дѣйствующими. Проф. *П. Бахметьевъ* (Софія).

ІОСИФЪ АНДРЕЕВИЧЪ КЛЕЙБЕРЪ.

(некрологъ).

Намъ съ грустію приходится отмѣтить утрату одного изъ наиболѣе способныхъ и симпатичныхъ сотрудниковъ нашего

журнала. 31 Января 1892 г. въ Ниццѣ скончался приватъ-доцентъ С.-Петербургскаго университета Іосифъ Андреевичъ Клейберъ. Чахотка похитила изъ нашей малочисленной физико-математической семьи столь много обѣщавшаго и дѣятельнаго члена, пользовавшагося уже заслуженною извѣстностью, не смотря на молодые годы. Роковой исходъ можно было отчасти предвидѣть изъ послѣдняго къ намъ письма І. А. изъ Ниццы, въ которомъ, интересуясь по прежнему „Вѣстн. Оп. Физ.“ и предлагая кое какія для него задачи *), онъ жаловался между прочимъ на плевритъ, на врачей, которые обѣщаютъ ему таковой еще „на два года“, и на скуку вслѣдствіе невозможности заниматься чѣмъ либо.

Да, этотъ человѣкъ не привыкъ ничего не дѣлать. Для него бездѣйствіе могло быть только предвозвѣстникомъ смерти. Съ 1885 года, когда онъ окончилъ С.-Петербургскій университетъ (удостоенный золотой медали за сочиненіе „Астрономическая теорія падающихъ звѣздъ“), его имя почти непрерывно встрѣчалось на страницахъ русскихъ, нѣмецкихъ, англійскихъ спеціальныхъ журналовъ, какъ имя автора статей подчасъ весьма оригинальныхъ и своеобразныхъ. Въ 1887 г. имя это сдѣлалось въ Россіи весьма популярнымъ, благодаря брошюрамъ о предстоявшемъ полномъ солнечномъ затменіи (7-го авг. 1887 г.), своевременно изданнымъ и распространеннымъ (въ двухъ изданіяхъ), а также и весьма дѣятельному участію І. А. въ трудахъ коммиссіи по снаряженію экспедицій для наблюденія самого затменія. Въ прошломъ 1891 г. І. А. закончилъ и издалъ свой капитальный трудъ „Опредѣленіе орбитъ метеорныхъ потоковъ“ (съ приложеніемъ краткаго извлеченія на англійскомъ языкѣ), заключающій массу цѣннаго для спеціалистовъ матеріала.

Помимо астрономіи, покойный живо интересовался различными вопросами изъ другихъ областей науки, что отчасти мѣшало ему сосредоточить свои выдающіяся способности на чемъ нибудь одномъ. Онъ, очевидно, торопился дѣлиться съ другими наплывомъ собственныхъ идей, какъ бы предчувствуя близкій конецъ, и свое время онъ цѣнилъ крайне дорого. Намъ припоминается, какъ въ одной изъ своихъ статей (въ „Русскомъ Богатствѣ“) онъ протестовалъ противъ непроизводительной затраты времени на процессъ письма, при помощи нынѣ принятыхъ знаковъ, доказывалъ возможность излагать свои мысли съ меньшею затратою механическаго труда на рукописаніе, и предлагалъ свою систему упрощенія письма, нѣчто въ родѣ стенографіи, которой, какъ говорилъ, онъ самъ придерживался для записыванія всякихъ замѣтокъ, конспектовъ и пр.

Впослѣдствіи, убѣдившись въ удобствахъ употребленія пишущихъ машинъ, онъ пріобрѣлъ, вѣроятно, большой къ нимъ навыкъ, если судить по тому факту, что всѣ доставленныя имъ въ

*) См. напр. зад. № 258.

нашу редакцію статьи и письма были не рукописныя, а печатанныя при помощи такой машины.

Изъ статей I. А., помѣщенныхъ въ нашемъ журналѣ, напомнимъ слѣдующія, изданныя также и отдѣльными брошюрами:

Изъ исторіи ариѳметики (Умноженіе и дѣленіе) *).

Среднія величины: ариѳметическая, геометрическая и гармоническая.

Внутренняя точка геометрической фигуры.

Новый способъ извлеченія корней.

Профессоръ Глазенапъ, подъ непосредственнымъ руководствомъ котораго покойный работалъ, закончиваетъ свой некрологъ (въ Вып. 2—3 Журн. Русск. Физ.-Хим. Общ. за тек. годъ) слѣдующими словами:

„Клейберъ никогда не отдыхалъ: онъ постоянно работалъ, читалъ лекціи въ университетѣ, на высшихъ женскихъ курсахъ, читалъ публичныя лекціи и печаталъ статьи общедоступнаго содержанія.“

„Онъ трудился съ любовью и умѣлъ трудиться.“

„Миръ его праху, честь его имени!“ *Ш.*

ЗАДАЧИ.

№ 322. Въ натуральномъ ряду трехзначныхъ чиселъ найти такую пару послѣдовательныхъ чиселъ, которыя, написанныя подъ рядъ, даютъ полный квадратъ нѣкотораго трехзначнаго числа. Сколько рѣшеній? (Заимств.) *Ш.*

№ 323. Стороны четыреугольника ABCD точками a, b, c и d раздѣлены въ одномъ и томъ же отношеніи, такъ что

$$\frac{Aa}{aB}=\frac{Bb}{bC}=\frac{Cc}{cD}=\frac{Dd}{dA},$$

и эти точки соединены послѣдовательно прямыми. Показать, что суммы площадей противолежащихъ треугольниковъ $Aad + Cbc$ и $Bab + Dcd$ равны. (Заимств.) *Ш.*

№ 324. Въ треугольникѣ ABC проведена высота AD и раздѣлена въ точкѣ O пополамъ. Изъ вершины B проведена черезъ точку O прямая BM, пересѣкающая сторону AC въ точкѣ M. По даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить длину прямой BM. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 325. Даны двѣ непересѣкающіяся окружности, одна внѣ другой. Изъ произвольной точки A одной окружности проведены касательныя къ другой. Середина хорды BC, соединяющей точки

---

*) Къ сожалѣнію, въ настоящее время все изданіе этой брошюры распродано и ея уже нѣтъ въ продажѣ.

касанія, пусть будетъ D. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки D. *П. Николаевъ* (Пенза).

№ 326. Рѣшить уравненіе

$$\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}mx = \mathrm{Cos}x + \mathrm{Sin}mx.$$

М. Фридманъ (Кіевъ).

№ 327. Двѣ окружности, центры которыхъ O и o, касаются въ точкѣ A. Продолженная прямая Oo пересѣкаетъ ихъ соотвѣтственно въ точкахъ B и b. Черезъ точку касанія A проведена произвольная прямая, пересѣкающая данныя окружности соотвѣтственно въ точкахъ C и c. Пусть прямыя BC и bc пересѣкаютъ радикальную ось данныхъ окружностей въ точкахъ M и m. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ Mo и mO. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ

въ Тюменскомъ реальномъ училищѣ въ $18^{90}/_{91}$ учебн. году.

Въ дополнительномъ классѣ. *По приложенію алгебры къ геометріи:* „Опредѣлить радіусъ основанія цилиндра, котораго объемъ равновеликъ объему даннаго усѣченнаго конуса, а высота равна образующей конуса.

Въ VI классѣ. *По ариѳметикѣ:* По векселю уплатили 4800 руб. съ учетемъ 10%. За сколько мѣсяцевъ до срока произведена уплата, если валюта векселя равнялась 5120 руб. (Учетъ математическій).

По геометріи: 1. Данъ правильный шестиугольникъ, сторона котораго a. Опредѣлить объемы тѣлъ, происшедшихъ отъ вращенія шестиугольника, принимая за ось вращенія діаметры вписаннаго и описаннаго круговъ въ шестиугольникъ.

2. Построить треугольникъ по основанію, высотѣ и углу противоположному основанію.

1. *По алгебрѣ:* 1. Въ трехъ кускахъ матеріи было 134 арш. одинаковой доброты. Первый кусокъ, за исключеніемъ 12 арш. негодныхъ для продажи, былъ проданъ за 36 руб.; второй кусокъ безъ 4 арш. былъ проданъ за 24 руб. Сколько аршинъ было въ каждомъ кускѣ, если матерія продавалась по одинаковой цѣнѣ за аршинъ?

2. Сколько надо вычесть изъ a и b, чтобы отношеніе сдѣлалось равнымъ $\frac{m}{n}$?

По тригонометріи: Крестъ на колокольнѣ видѣнъ на разстояніи 1144 ф. отъ колокольни подъ угломъ 7′ 30″. Опредѣлить длину креста, зная, что высота колокольни 47 фут.

*

По начертательной геометріи: Дана правильная четырехъугольная или пятиугольная пирамида. Плоскость, составляющая съ плоскостью основанія уголь въ 45°, пересѣкаетъ данную пирамиду. Опредѣлить проэкціи сѣченія пирамиды и дѣйствительную величину сѣченія.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 187 (2 сер.). Доказать теоремы: если діагонали вписаннаго въ кругъ четыреугольника пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то

1) Сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ равна квадрату діаметра круга,

2) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга на одну изъ сторонъ, равенъ половинѣ противолежащей стороны,

3) Средины сторонъ четыреугольника и основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки пересѣченія діагоналей на стороны, расположены на одной окружности, центръ которой есть средина прямой, соединяющей центръ круга съ точкою пересѣченія діагоналей.

Пусть AB и CF данныя діагонали, D точка ихъ пересѣченія. Изъ центра O опустимъ перпендикуляры OK на FB и OL на AC. △ AFD подобенъ △ FOK, ибо ∠FAD и FOK измѣряются половиной дуги FB. Точно также подобны △△ FAD и AOL, слѣдовательно △△ AOL и FOK равны ($FO = OA = R$), а потому $FK = OL$ и $OK = AL$, а также

$$\frac{AC^2}{4} + \frac{FB^2}{4} = R^2 \text{ или } AC^2 + FB^2 = 4R^2.$$

Проведемъ черезъ L линію, параллельную AB; она раздѣлитъ DC пополамъ и будетъ къ ней перпендикулярна, слѣдовательно △ LDC равнобедренный. Такъ какъ $OL^2 + LC^2 = R^2$, то и $OL^2 + LD^2 = R^2 = Const$. Извѣстно, что геом. мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ до двухъ данныхъ величина постоянная, есть окружность, центръ которой лежитъ на срединѣ разстоянія двухъ данныхъ точекъ. [Въ самомъ дѣлѣ, пусть Q — средина линіи DO, тогда изъ △△ OLQ и LQD $OL^2 + LD^2 = 2(LQ^2 + QO^2)$, но $OL^2 + LD^2 = Const$, $OQ^2 = Const$ слѣдовательно L лежитъ на кругѣ радіуса LQ].

Опустимъ на AC перпендикуляры QP и DE. Такъ какъ $OQ = QD$, то $LP = PE$ и $LQ=EQ$, т. е. основанія перпендику-

ляровъ изъ точки пересѣченія діагоналей на стороны лежатъ на той же окружности.

В. Россовская, К. Щиголевъ (Курскъ), *А. Байковъ* (Москва), *А. П.* (Пенза), *И. Бискъ* (Кіевъ).

№ **225** (2 сер.). Требуется вычислить стороны AB и AC треугольника ABC по данной третьей его сторонѣ $BC = a$ и радіусу r внутривписаннаго круга, при условіи, что кругъ этотъ касается окружности, описанной на сторонѣ BC какъ на діаметрѣ.

Пусть соотвѣтственно K_1, K_2 и K_3 (K_1 на сторонѣ AB) точки касанія сторонъ съ вписаннымъ кругомъ, центръ котораго O'. Средина стороны BC — O.

Изъ $\triangle\, O'K_2O$, такъ какъ $OO' = \frac{a}{2} - r$

$$K_2O = \sqrt{O'O^2 - O'K^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}.$$

Далѣе

$$BK_1 = BK_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar},$$

$$CK_3 = CK_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}.$$

Пусть $x = AK_1 = AK_3$, тогда

$$c = x + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar} \quad \text{и} \quad b = x + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}.$$

Подставляя эти значенія въ формулу

$$r = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b+c)}$$

находимъ

$$x = \frac{ar}{a-r}$$

поэтому

$$c = \frac{a(a+r)}{2(a-r)} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$$

$$b = \frac{a(a + r)}{2(a - r)} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}.$$

А. П. (Пенза). *В. Костинъ* (Симбирскъ), *В. Шидловскій* (Полоцкъ), *К. Щиголевъ* (Курскъ), *С. Лисякъ* (Кременчугъ), *П. Ивановъ* (Одесса).

№ **227** (2 сер.). Показать, что если A, B, C, D суть углы четыреугольника, то

$$\text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC} + \text{tgD} = \text{tgAtgBtgC} + \text{tgAtgBtgD} +$$
$$+ \text{tgAtgCtgD} + \text{tgBtgCtgD}.$$

Извѣстно, что

$$A + B + C + D = 360^\circ,$$

слѣдовательно

$$\text{tg}(A + B + C + D) = 0,$$

Но

$$\text{tg}(A + B + C + D) = \frac{\text{tg}(A + B) + \text{tg}(C + D)}{1 - \text{tg}(A + B)\text{tg}(C + D)} = 0,$$

поэтому

$$\text{tg}(A + B) + \text{tg}(C + D) = 0;$$

или

$$\frac{1}{\text{tg}(A + B)} + \frac{1}{\text{tg}(C + D)} = 0.$$

Умножая обѣ части на (tgA + tgB)(tgC + tgD), получимъ:

$$(\text{tgA} + \text{tgB})\frac{\text{tgC} + \text{tgD}}{\text{tg}(C + D)} + (\text{tgC} + \text{tgD})\frac{\text{tgA} + \text{tgB}}{\text{tg}(A + B)} = 0,$$

или

$$(\text{tgA} + \text{tgB})(1 - \text{tgCtgD}) + (\text{tgC} + \text{tgD})(1 - \text{tgAtgB}) = 0,$$

откуда

$$\text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC} + \text{tgD} = \text{tgAtgBtgC} + \text{tgAtgBtgD} +$$
$$+ \text{tgAtgCtgD} + \text{tgBtgCtgD}.$$

В. Костинъ (Симбирскъ), *А. П.* (Пенза), *Г. Ширинкинъ*, *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *В. Шидловскій*, *Зеньковичъ*, *Смоленскій*, *Калиновскій* (Полоцкъ), *П. Ивановъ* (Одесса), *С. Лисякъ*, *І. Поляковъ* (Кременчугъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 18 Мая 1892 года.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.